Définition : une transformation (symétrie, rotation, translation) laisse une figure *invariante* si l'image de cette figure par la transformation est elle-même (c'est à dire qu'elle reste globalement la même après avoir subi la transformation, même si les points qui la composent sont éventuellement permutés)

Définition : un *pavage périodique* est une figure qui vérifie :
- il existe deux translations, de vecteurs non colinéaires (c'est à dire dont les directions sont différentes ; qui ne sont pas parallèles), par lesquelles elle est invariante
- il existe des vecteurs u et v (appelés des « vecteurs de base ») pour lesquels : si w est le vecteur d'une translation laissant invariant le pavage, alors w peut s'écrire w=xu+yv où x et y sont des entiers.

Remarque : il existe des pavages non périodiques

Définition : soit un pavage périodique de vecteurs de base u et v. Une *maille à translater* est une partie du pavage telle que si on considère tous ses translatés par les vecteurs xu+yv, avec x,y entiers relatifs quelconques), alors ces translatés recouvrent tout le pavage et ne se recouvrent jamais les uns les autres.

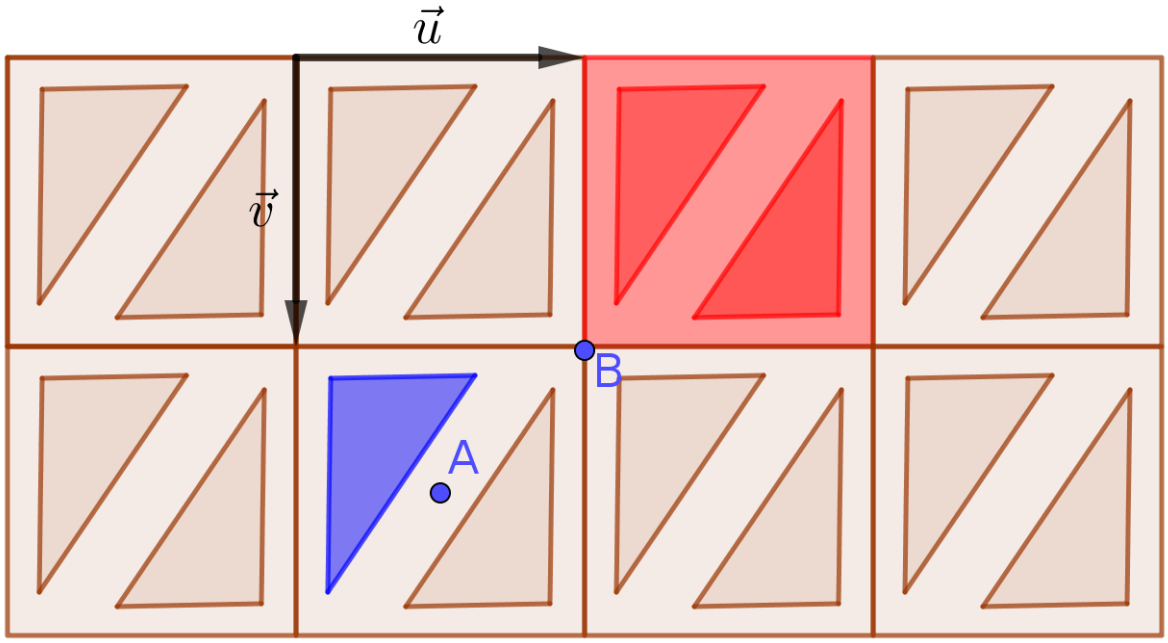
Définition : soit un pavage et toutes les transformations isométriques qui le laissent invariant. Un *motif élémentaire* du pavage est une partie du pavage telle que si on considère toutes les images de cette partie par les isométries laissant le pavage invariant, ces images ne se recouvrent pas et recouvrent le plan tout entier.

$\vec{v}_1$

$\vec{v}_2$

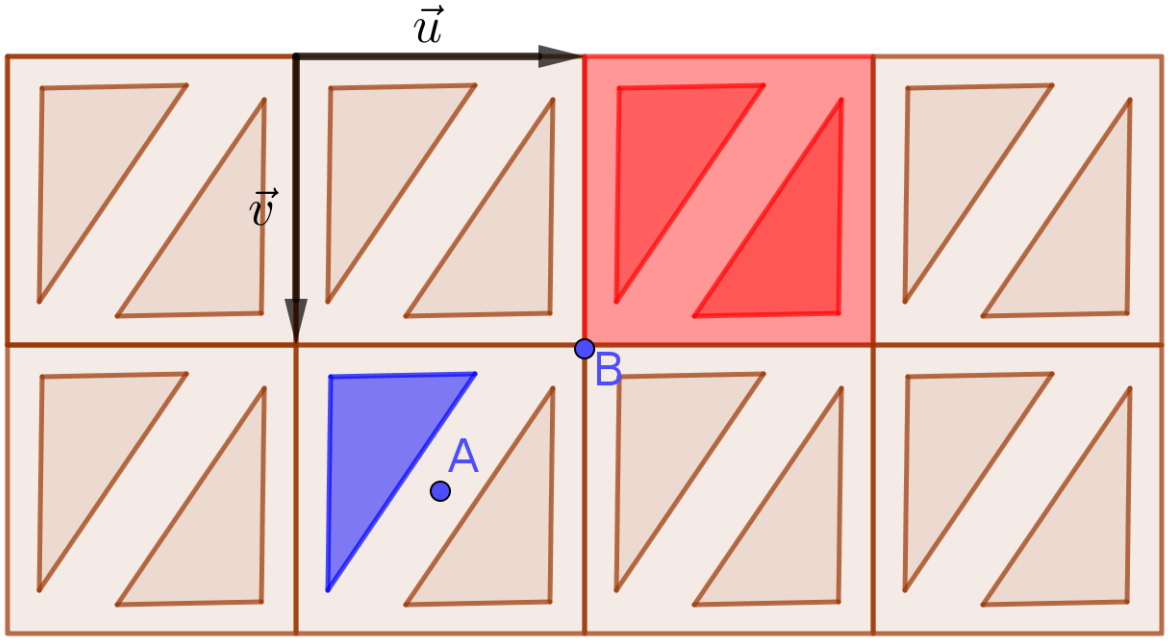
⋮ ⋮ ⋮

Exemple : Un début de pavage très simple.



En rouge : une maille à translater (on aurait pu en choisir une de forme différente).
Les deux vecteurs noirs sont des vecteurs de base (on aurait pu en choisir deux autres).
En bleu : un motif élémentaire (on aurait pu en choisir de forme différente).
Il y a pleins de translations qui laissent le pavage invariant (mais leurs vecteurs sont tous de la forme $x\times\vec{u}+y\times\vec{v}$)
Il y a plein de symétries centrales qui laissent le pavage invariant (par exemple celle de centre A ou celle de centre B).

Exemple : Un début de pavage très simple.



En rouge : une maille à translater (on aurait pu en choisir une de forme différente).
Les deux vecteurs noirs sont des vecteurs de base (on aurait pu en choisir deux autres).
En bleu : un motif élémentaire (on aurait pu en choisir de forme différente).
Il y a pleins de translations qui laissent le pavage invariant (mais leurs vecteurs sont tous de la forme $x\times\vec{u}+y\times\vec{v}$)
Il y a plein de symétries centrales qui laissent le pavage invariant (par exemple celle de centre A ou celle de centre B).

1) Définition et exemples :

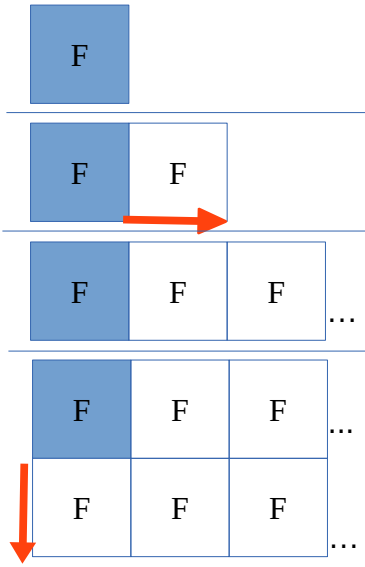
Rappel : ce qu'on appelle le « plan », c'est une sorte de prolongement du plan de travail, indéfiniment dans toutes les directions.

Un ***pavage périodique du plan*** est une figure telle que :

1. elle remplit le plan tout entier (elle peut être prolongée à l'infini dans toutes les directions, il ne subsiste aucun « trou »)
2. elle est composée d'un nombre fini de sous-figures (appelés « ***pavés élémentaires*** » ou « ***tuiles de base*** »), qui sont répétées indéfiniment par symétrie et/ou rotation et/ou translation
3. il n'y a pas de superposition entre les copies des pavés élémentaires (ceux-ci sont seulement en contact sur leurs bords)
4. il existe deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ tels que pour toute translation de vecteur $\vec{w}$ laissant invariant le pavage, $\vec{w}$ peut s'écrire sous la forme $a\times\vec{v}_1+b\times\vec{v}_2$, avec a et b des nombres entiers.

Remarque : cette définition est assez compliquée, il est sans doute inutile pour le bac de l'apprendre par cœur. Elle permet d'exprimer mathématiquement la conception d'un motif qui soit utilisable pour carreler une surface aussi grande que l'on veut.
Les trois premières conditions sont assez intuitives.
La quatrième condition paraît beaucoup plus technique. Elle permet de ne considérer que des pavages ***périodiques***. En effet, il existe des pavages du plan qui sont non périodiques, c'est à dire qui ont une structure beaucoup plus compliquée. Par exemple, la figure n°5 de l'activité est un morceau d'un pavage de Penrose, non périodique. Ces pavages peuvent avoir un intérêt artistique, mais ne seront pas étudiés mathématiquement cette année.

Exemple : Description du pavage du plan par des carrés.



Le pavé de départ est un carré.

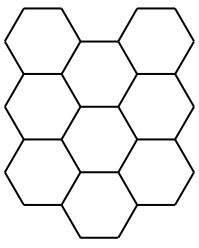
On translate ce carré par la translation de vecteur $\vec{v}_1$.

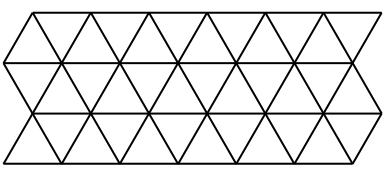
On répète cette translation indéfiniment (dans les deux sens).

On translate ces carrés par la translation de vecteur $\vec{v}_2$ (de façon répétée dans les deux sens).

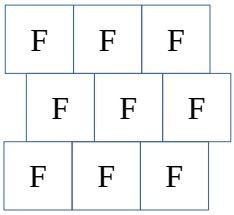
On peut ainsi paver le plan tout entier avec des carrés.

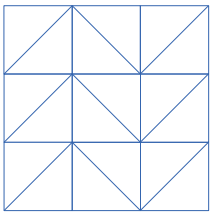
Images :
Voici des images montrant comment on peut paver le plan par des hexagones ou par des triangles équilatéraux :





Voici deux exemples différents de pavages du plan par des carrés (décorés d'un « F » ou d'une ligne diagonale) :

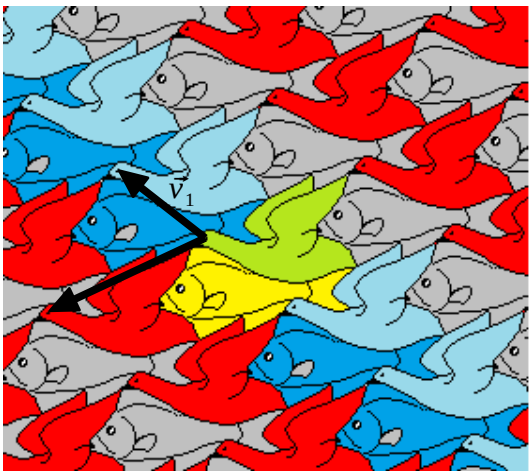




Ces deux pavages sont différents car les déplacements pour passer d'un carré à l'autre ne sont pas les mêmes.

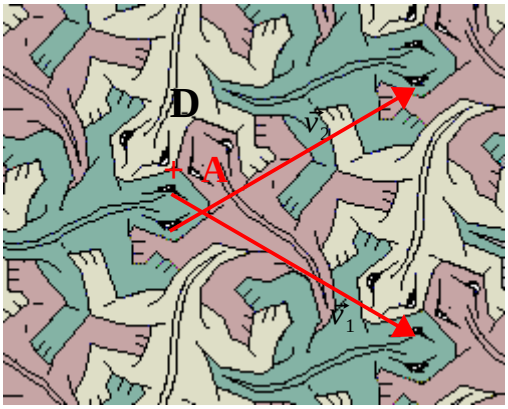
Exemples de descriptions de pavages :

Les exemples de pavages suivants sont tirés d'œuvres du graveur néerlandais M.C. Escher (1898 - 1972).



Les pavés de départ sont le poisson jaune et l'oiseau vert.
On translate ces pavés par la translation de vecteur $\vec{v}_1$.
On répète cette translation (ainsi que celle de vecteur $-\vec{v}_1$).
On obtient ainsi la « bande » d'animaux bleus.
On translate ensuite cette « bande » en répétant la translation de vecteur $\vec{v}_2$ (et $-\vec{v}_2$) pour obtenir les oiseaux rouges et les poissons gris.

Remarque : Pour dessiner le vecteur d'une translation, penser à relier deux points qui se correspondent dans les figures : par exemple ici les vecteurs relient l'œil d'un oiseau avec l'œil de l'oiseau d' « à côté ».



Ici, le pavé de départ est le lézard blanc marqué d'un « D ».
On effectue une rotation autour du point A (représenté par un « + » rouge).
Cette rotation, de centre A, d'angle 1/3 de tour (soit 120° car 3 fois 120° font 360°), de sens celui des aiguilles d'une montre, transforme le lézard blanc en le lézard marron.
En répétant la même rotation une deuxième fois, on obtient le lézard vert.
Il reste ensuite à répéter des translations de cet ensemble de 3 lézards pour obtenir une « bande infinie », puis à translater cette bande infinie de façon répétée selon une autre translation, pour remplir tout le plan : on peut utiliser les translations de vecteur $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

Remarque : comme on le constate sur les exemples précédents, on utilise toujours 2 translations pour finir le pavage. Cela vient du fait que la structure sous-jacente du pavage utilise une sorte de « quadrillage » que l'on voit apparaître lorsqu'on colorie tous les translatés d'un des éléments de base du pavage. Cela explique pourquoi la définition d'un pavage **périodique** introduit la 4^{e} condition, sur les vecteurs des translations.

2) Quelques rappels pour faire des calculs.

Angles :
Un tour complet correspond à un angle de 360°. Un demi-tour : 180°, etc.
La somme des trois angles d'un triangle vaut 180°.
Lorsqu'on veut calculer des angles dans un polygone régulier, une méthode peut consister à découper ce polygone en triangles et à faire des calculs d'angles dans les triangles.

Formules de trigo :